

# APLICACION DE LA VARIABLE TIEMPO DE ESPERA A LOS RESULTADOS DE LA INSEMINACION ARTIFICIAL EN EL GANADO VACUNO DE LA PROVINCIA DE LEON

Por *B. García Fernández (1)*

*J. C. Domínguez Fernández-Tejerina (2)*

*L. Anel Rodríguez (2)*

## INTRODUCCION

Partiendo de una tabla de datos relativa a la inseminación artificial en ganado bovino de la provincia de León<sup>7</sup>, se encontraron dos tipos de variables; unas de Bernouilli, donde las probabilidades de éxito son probabilidades condicionadas, de tal manera que la probabilidad de éxito en la  $k$ -ésima inseminación depende de las  $k-1$  anteriores; aplicando el teorema de las Probabilidades Completas<sup>2</sup>, se obtiene una segunda variable  $T$  que es un Tiempo de Espera<sup>2</sup>, obteniéndose además que, tanto para las variables de Bernouilli, como para la variable  $T$ , los estimadores máximo verosímiles de las probabilidades de éxito en el primer caso y de la ley de probabilidad en el segundo, son las correspondientes proporciones, por lo tanto se pueden aplicar los contrastes de Homogeneidad<sup>6</sup>, y de Comparación de proporciones<sup>5</sup>.

La variable  $T$  en este caso solamente puede tomar valores de 1 a 4 puesto que en la tabla utilizada, se considera que si una vaca necesita una cuarta inseminación, queda gestante en ella con probabilidad 1.

Para nuestro estudio, y como consecuencia de un pequeño tamaño muestral en los resultados dados en cuarta inseminación, consideraremos que la variable  $T$  toma solamente valores de 1 a 3, sumando para el último valor las frecuencias correspondientes a los datos proporcionados por la tercera y cuarta inseminación.

La ley de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de espera, definida para los valores 1, 2 y 3 con probabilidad positiva, nos proporciona tres índices, que corresponden a las probabilidades de que una vaca necesite 1, 2 o 3 inseminaciones para quedar gestante y que llamaremos, Índices de Tiempo de Espera (1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup>), mientras que la espe-

(1) Cátedra de Matemáticas

(2) Departamento de Cirugía y Reproducción

ranza matemática de dicha variable, es el Índice de Concepción, definido como el número medio de inseminaciones para que se produzca una gestación.

## MATERIAL Y METODOS

1-1 El material objeto del presente trabajo, ha sido extraído de los datos proporcionados por el Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación; en su «Información sobre reproducción animal. Inseminación artificial con semen congelado», año 1982, remitiéndonos a los resultados en la provincia de León.

1-2 Para realizar el estudio estadístico correspondiente, se elaboró una nueva tabla de datos con las siguientes consideraciones:

a) Se incluyen en el apartado (Otras), aquellas razas cuyo tamaño muestral es pequeño ( $< 30$ ), sumando las frecuencias correspondientes. Se trabajó por ello, sobre 9 razas distintas, que corresponden a los siguientes códigos de identificación:

00 = Conjunto Mestizo  
10 = South Devon  
11 = Frisona  
12 = Parda Alpina  
13 = Charolesa  
22 = Rubia Gallega  
25 = Asturiana  
30 = Fleckvieh  
( ) = Otras razas

Para facilitar la notación, se reordenaron las razas con los códigos de 1 a 9.

b) Como en cuarta inseminación, apenas aparecen datos, se trabajó con 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> o más para dar mayor validez a los contrastes realizados.

1-3 Notación y obtención de las variables:

Para cada raza  $m = 1, 2, \dots, 9$ ; disponemos de:

$N_1^{(m)}$  = n.º total de vacas de la raza  $m$ .

$n_i^{(m)}$  = n.º de vacas de la raza  $m$ , que quedan gestantes en la inseminación  $i$ -ésima.

Para  $i = 1, 2$  y  $3$

Por lo tanto:

$$N_1^{(m)} = n_1^{(m)} + n_2^{(m)} + n_3^{(m)}$$

Llamamos:

$$N_2^{(m)} = n_2^{(m)} + n_3^{(m)}$$

$$N_3^{(m)} = n_3^{(m)}$$

Tenemos entonces tres variables de Bernouilli, para cada raza definidas de la siguiente manera:

$$x_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si una vaca de la raza } m \text{ queda gestante en la } i\text{-ésima inseminación.} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3.$

Entonces:

$$P(X_i^{(m)} = 1) = p_i^{(m)}$$

$$P(X_i^{(m)} = 0) = 1 - p_i^{(m)}$$

Estas probabilidades, son los porcentajes de Fertilidad en tantos por uno, para cada raza, en cada inseminación.

El estimador máximo verosímil correspondiente a cada una de las  $p_i^{(m)}$  (1) es:

$$\hat{p}_i^{(m)} = \frac{n_i^{(m)}}{N_i^{(m)}}$$

Por lo tanto:

$$\hat{q}_i^{(m)} = 1 - \hat{p}_i^{(m)} = \frac{N_{i+1}^{(m)}}{N_i^{(m)}} \text{ con } N_4^{(m)} = 0$$

Estamos en condiciones de definir las 9 variables:

$T^{(m)} = n.$  de inseminaciones necesarias para que una vaca quede gestante.

Esta variable puede tomar los valores 1, 2 y 3 con probabilidad positiva. Utilizando el teorema de la Probabilidad Compuesta<sup>2</sup>, obtenemos:

$$t_k^{(m)} = P(T^{(m)} = k) = \prod_{i=1}^{k-1} q_i^{(m)} p_k^{(m)} \quad \text{siendo } q_0^{(m)} = 1 \text{ para } k = 1, 2, 3.$$

que son, para cada raza, los Indices Tiempo de Espera en cada una de las inseminaciones.

Si aplicamos ahora los resultados anteriores, tendremos:

$$\hat{t}_k^{(m)} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{N_{i+1}^{(m)}}{N_i^{(m)}} \cdot \frac{n_k^{(m)}}{N_k^{(m)}} = \frac{n_k^{(m)}}{N_1^{(m)}}$$

Utilizando los estimadores máximo verosímiles para la media y la varianza poblacional tendremos:

$$\bar{T}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 k \frac{n_k^{(m)}}{N_1^{(m)}} = \frac{N_1^{(m)} + N_2^{(m)} + N_3^{(m)}}{N_1^{(m)}}$$

$$\sigma_T^{(m)2} = \frac{1}{N_1^{(m)}} \sum_{k=1}^3 k^2 n_k^{(m)} - \bar{T}^{(m)2} = 3 \bar{T}^{(m)} - 2 \hat{T}_3^{(m)} - \bar{T}^{(m)2}$$

Realizados estos cálculos se configuró la tabla definitiva. Tabla n.º I.

1-4 Contrastes de hipótesis:

a) Se analizó primeramente la hipótesis nula: « $H_0$ : Las poblaciones son homogéneas y por lo tanto podemos considerar que globalmente se ajustan a una única variable aleatoria  $T$ ».

**TABLA I**  
**Descripción por razas del n.º de vacas que quedan gestantes en cada inseminación, índices de concepción y de tiempo de espera**

	Gestaciones en 1ª, 2ª y 3ª inseminación.			Frecuencias acumuladas			Índices de la variable Tiempo de Espera.			Índice de Concepción	Desviación t. muestral
	$n_1^{(m)}$	$n_2^{(m)}$	$n_3^{(m)}$	$N_1^{(m)}$	$N_2^{(m)}$	$N_3^{(m)}$	$\hat{t}_1^{(m)}$	$\hat{t}_2^{(m)}$	$\hat{t}_3^{(m)}$		
1	4982	1689	487	7158	2176	487	0.70	0.23	0.07	1.37	0.60
2	32	6	2	40	8	2	0.80	0.15	0.05	1.25	0.54
3	24027	8116	2714	34859	10832	2714	0.69	0.23	0.08	1.39	0.63
4	20327	7832	2950	31109	10782	2950	0.65	0.25	0.10	1.45	0.78
5	122	29	11	162	40	11	0.75	0.18	0.07	1.32	0.41
6	49	20	8	77	28	8	0.64	0.26	0.10	1.46	0.80
7	317	99	28	444	127	28	0.71	0.22	0.07	1.36	0.54
8	282	109	36	427	145	36	0.66	0.25	0.09	1.43	0.65
9	50	38	19	107	57	19	0.47	0.35	0.18	1.71	0.75

Razas

En el caso en que no se detecten diferencias significativas, la variable Tiempo de Espera T tendrá una ley de probabilidad común para todas ellas y por consiguiente una esperanza común, que es precisamente el Índice de Concepción.

Para realizar dichos contrastes, utilizamos los datos dispuestos de la siguiente manera:

$r_1$	$r_2$	.....	$r_s$	
$n_1^{(r_1)}$	$n_1^{(r_2)}$	.....	$n_1^{(r_s)}$	$n_{1.}$
$n_2^{(r_1)}$	$n_2^{(r_2)}$	.....	$n_2^{(r_s)}$	$n_{2.}$
$n_3^{(r_1)}$	$n_3^{(r_2)}$	.....	$n_3^{(r_s)}$	$n_{3.}$
$n_{.1}$	$n_{.2}$	.....	$n_{.s}$	N

Siendo:

$r_1, r_2, \dots, r_s$ , los códigos de las razas para las que se quieren establecer las diferencias.

$$n_i = \sum_{j=1}^s n_i^{(r_j)} \quad n_j = \sum_{i=1}^3 n_i^{(r_j)} \quad N = \sum_{i=1}^3 n_i = \sum_{j=1}^s n_j$$

Por último el estadístico de contraste será: <sup>6</sup>

$$I(r_1, r_2, \dots, r_s) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^s \frac{(n_i^{(r_j)} - n_i \cdot n_j / N)^2}{n_i \cdot n_j / N}$$

que sigue una distribución  $\chi^2_{(s-1)}$  bajo hipótesis de homogeneidad.

b) Realizados los contrastes de homogeneidad, se formaron cuatro grupos para los cuales se encontraron diferencias significativas. El segundo contraste completa al primero, ya que una vez demostrado que las probabilidades  $t_k^{(m)}$  se estiman a través de proporciones, se puede analizar si dos proporciones se pueden considerar significativamente distintas en una misma inseminación para los cuatro grupos de razas formados, y como consecuencia, si se mantienen en todas las inseminaciones para los I. de Tiempo de Espera, las diferencias encontradas para los Índices de Concepción.

El estadístico de contraste para este caso será <sup>5</sup>

$$I_i(r_k, r_h) = \frac{|\hat{t}_i^{(r_k)} - \hat{t}_i^{(r_h)} - \hat{t}_i^{(r_k)} - t_i^{(r_h)}|}{\sqrt{\frac{\hat{t}_i^{(r_k)}(1 - \hat{t}_i^{(r_k)})}{N_i^{(r_k)}} + \frac{\hat{t}_i^{(r_h)}(1 - \hat{t}_i^{(r_h)})}{N_i^{(r_h)}}}}$$

para  $i = 1, 2, 3$

que sigue una distribución Normal  $N(0, 1)$ , bajo hipótesis de igualdad de proporciones.

- c) Como criterio de decisión, se utilizó:<sup>3-4</sup>
- $\alpha > 0.1$  no se detectan diferencias significativas (N.S.)
  - $0.05 < \alpha \leq 0.1$  diferencias casi significativas (C.S.)
  - $0.01 < \alpha \leq 0.05$  diferencias significativas (\*)
  - $0.001 < \alpha \leq 0.01$  diferencias muy significativas (\*\*)
  - $\alpha \leq 0.001$  diferencias altamente significativas (\*\*\*)

## RESULTADOS Y DISCUSION

1-1) Aplicado el test de Homogeneidad, se obtiene que no se detectan diferencias significativas con respecto a la variable T = n.º de inseminaciones necesarias para que una vaca quede gestante, en los siguientes casos:

- Entre las razas: Conjunto Mestizo (1), South Devon (2), Charolesa (5), Asturiana (7), se obtiene:

$$I(1, 2, 5, 7) = 5.48 \Rightarrow 0.3 < \alpha < 0.5$$

- Entre las razas: Parda Alpina (4), Rubia Gallega (6), Flevieh (8), se obtiene:

$$I(4, 6, 8) = 0.667 \Rightarrow 0.95 < \alpha < 0.975$$

En el resto de los casos las diferencias son significativas. Formamos entonces, 4 grupos donde se detectan las diferencias, de la siguiente manera:

(a) = (Conjunto Mestizo, South Devon, Charolesa, Asturiana)

(b) = (Parda Alpina, Rubia Gallega, Fleckvieh)

(c) = (Frisona)

(d) = (Otras razas)

Los resultados del valor del estadístico de contraste, y de la significación, están dados en la tabla II.

1-2) Aplicado el test de igualdad de proporciones, se encontró que las diferencias entre los Índices de Concepción para los 4 grupos, se mantenían en los I. de Tiempo de Espera para las tres inseminaciones, excepto entre los grupos (a) y (c) donde no se aprecian diferencias significativas en segunda inseminación y diferencias casi significativas en primera, mientras que, en tercera son muy significativas.

Los resultados del valor del estadístico de contraste, y del tipo de significación, se dan en la tabla n.º III.

1-3) Se deduce de estos resultados, que salvo en el caso anterior, las diferencias son, en los demás casos, altamente significativas para la primera inseminación, y por tanto las mayores diferencias se aprecian entre las probabilidades de que una vaca necesite una inseminación para quedar gestante, y como consecuencia, entre los porcentajes de Fertilidad en primera inseminación, (Ambos índices coinciden en 1.ª inseminación).

**TABLA II**  
Homogeneidad relativa a la variable tiempo de espera

	(b)	(c)	(d)
(a)	79 ***	9.58 **	33.2 ***
(b)	-	111 ***	17.9 ***
(c)	-	-	28 ***

Por lo tanto, se puede utilizar como criterio para discernir entre dos razas, salvo en el caso de la Frisona, la existencia de diferencias significativas entre los porcentajes de Fertilidad en primera inseminación (Incluso para la raza Frisona con todos los grupos de razas excepto con el grupo (a) donde se aprecian diferencias casi significativas en primera inseminación).

Por último, estos resultados nos llevan a establecer definitivamente cuatro grupos, significativamente distintos que son los ya especificados, y para los cuales, podemos dar los Índices de Concepción.

$$\bar{T}_{(a)} = 1.37 \quad \bar{T}_{(c)} = 1.39$$

$$\bar{T}_{(b)} = 1.44 \quad \bar{T}_{(d)} = 1.71$$

Estos Índices son característicos de cada raza, para la gestación por inseminación artificial, pues incluyen a los de Tiempo de Espera y son específicos de cada grupo de razas.

### RESUMEN

Con objeto de detectar posibles diferencias significativas en el comportamiento reproductor de 9 razas bovinas, sometidas a régimen de inseminación artificial en la provincia de León, se han aplicado dos tipos de contrastes de hipótesis a través de una variable tiempo de espera, encontrándose en este caso, como estimadores máximo verosímiles,

**TABLA III**  
**Comparación de los índices de tiempo de espera en cada inseminación**

Primera inseminación				Segunda inseminación				Tercera inseminación			
	$t_1$ (b)	$t_1$ (c)	$t_1$ (d)	$t_2$ (b)	$t_2$ (c)	$t_2$ (d)	$t_3$ (b)	$t_3$ (c)	$t_3$ (d)		
$t_1$ (a)	7.7 ***	1.6 C.S	4.8 ***	3.4 ***	0.1 N.S	2.6 **	8.2 ****	3.2 **	2.9 **		
$t_1$ (b)	-	9.8 ****	3.8 ***	-	5.7 ****	2.2 *	-	7.7 ****	2.2 *		
$t_1$ (c)	-	-	4.6 ***	-	-	2.6 **	-	-	2.7 **		

El valor numérico que aparece en cada tabla, corresponde al estadístico de contraste:  $I_i(r_k, r_h)$

para la ley de probabilidad de dicha variable, las correspondientes proporciones, estando en condiciones, por ello, de aplicar los test de Homogeneidad y de Comparación de Proporciones. Se concluye a partir de estos resultados que de acuerdo con la eficiencia reproductiva se pueden formar cuatro grupos para los que se establecen diferencias significativas: a) Conjunto mestizo, South Devon, Charolesa, Asturiana; b) Parda Alpina, Rubia Gallega, Fleckvieh; c) Frisona; y d) Otras razas.

## APPLICATION OF THE VARIABLE WAITING-TIME TO RESULTS OF ARTIFICIAL INSEMINATION IN COWS FROM LEON PROVINCE

### SUMMARY

Two types of hypothetical contrasts have been applied, to detect whether there exist significant differences among 9 breeds of cattle, studying artificial insemination in the Province of León, over a variable waiting-time, finding in this case, as estimators of maximum likelihood for the law of probability of the stated variable the corresponding proportions thus being in condition to apply the tests of Homogeneity and *Comparison of Proportions* and concluding from these results that four groups can be formed for which significant differences are established: a) Hybrid group, South Devon, Charolaise, Asturiana; b) Spanish-Brown, Rubia Gallega, Fleckvieh; c) Friesian; d) Other breeds.

### BIBLIOGRAFIA

- 1) C. M. CUADRAS (1982).- *Problemas de probabilidades y estadística* Vol. 2. E.U.N.I.B.A.R. Barcelona.
- 2) W. FELLER. (1973).- *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa Wiley S.A. Mexico.
- 3) E. L. LEHMANN. *Testing statistical hypothesis*. John Wiley. New York.
- 4) L. SACH. (1978).- *Estadística aplicada*. Labor S.A. Barcelona.
- 5) V. QUESADA et. al. (1982).- *Curso y ejercicios de estadística*. Alhambra. Madrid.
- 6) T. YAMANE (1974).- *Estadística*. Harla S. A. Mexico.
- 7) M. A. P. A. Dirección General de la Producción Agraria. Información sobre Reproducción Animal. Inseminación Artificial con Semen Congelado (Año 1982).